KOVARIAN PERSAMAAN MAXWELL MELALUI TRANSFORMASI LORENTZ

DwiTeguhRahardjo
PendidikanFisika FKIP UNS
teguhra@yahoo.com

Abstrak

Tujuan dari penelitianini adalah merumuskan persamaan transformasi Lorentz secara umum dan merumuskan persamaan Maxwell setelah melalui transformasi Lorentz. Sebagai hukum fisika, persamaan Maxwell juga berlaku di semua kerangka acuan inersial sehinggabentuk persamaan Maxwell harus kovaian terhadap transformasi Lorentz. Persamaan Maxwell dapat ditulis ulang sebagai persamaan tensor dalam ruang Minkowski. Metodologi penelitian berupa kajian pustaka yang diambil dari berbagai sumber referensi buku-buku fisika modern. Dari kajian pustaka diperoleh hasil yaitu transformasi Lorentz secara umum berupa $A'_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} a_{\mu\nu} A_\nu$. Bentuk persamaan Maxwell setelah melalui transformasi Lorentz adalah kovarian dengan persamaan sebagai berikut : $\sum_\nu \frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 J$ atau $\frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial f_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial f_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0$

Kata kunci :Transformasi Lorentz, kovarian persamaan Maxwell, Minkowski

Pendahuluan

Menurut postulat teori relativistic khusus yang pertama, semua hukum-hukum Fisika, baik elektromagnetik maupun mekanika, harus kovarian di dalam semua kerangka acuan yang bergerak linier dengan kecepatan v tetap relative terhadap kerangka acuan yang lain (di dalam semua kerangka inersial), maka rumusan persamaan kelistrikan dan kemagnetan yang memperlakukan koordinat ruang dan waktu mempunyai bentuk dasar yang sama.

Persamaan Maxwell menyajikan pernyataan matematik dalam listrik magnet antara lain, persamaan Maxwell pertama merupakan ringkasan hukum Coloumb terutama dari gaya antara muatan titikdengan imbas listrik dari materi, persamaan Maxwell kedua menggambarkan hukum Faraday tentang induksi, persamaan Maxwell yang ketiga adalah akibat dari hukum Ampere dari gaya antara aliran arus dan juga menyatakan bahwa muatan magnetic bebas tidak diketahui keberadaanya dan persamaan Maxwell yang keempat meliputi hukum Ampere tentang gaya antara aliran arus listrik dengan imbas magnetik dari materi ditambah konservasi dari muatan bebas.

H. A Lorentz telah menurunkan persamaan transformasi dengan menganggap bahwa kecepatan cahaya tetap sama di semua kerangka acuan inersial dan koordinat waktu (t) juga tidak sama di kerangka acuan inersial yang berbeda. Sebagai hukum fisika, persamaan Maxwell juga berlaku di semua kerangka acuan inersial sehingga bentuk persamaan Maxwell harus kovarian terhadap transformasi Lorentz. Persamaan Maxwell dapat ditulis ulang sebagai persamaan tensor dalam ruang Minkowski.

PEMBAHASAN

1. Transformasi Lorentz Umum

Persamaan gelombang menurut transformasi Lorentz

$$S^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2$$
…..………………………. (1)

notasi bentuk umum yang berupa ruang Minkowski

$$x_1 = x \qquad x_2 = y \qquad x_3 = z \qquad x_4 = ict$$
……..……………………………..(2)

(Arfken, G.B., 2001, hal. 283)

Persamaan (1) dapat ditulis

$$S^2 = \sum_{\mu=1}^{4} x_\mu^2 = \sum_{\mu=1}^{4} x'^2_\mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Persamaan transformasi yang menghubungkan dua koordinat sebagai empat persamaan linier umum

$$x'_\mu = \sum_{v=1}^{4} a_{\mu v} x_v \qquad (\mu = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

subtitusikan persamaan (4) ke (3) didapat

$$\sum x'^2_\lambda = \sum_\lambda \left(\sum_\mu a_{\lambda\mu} x_\mu \right) \left(\sum_v a_{\lambda v} x_v \right) = \sum_{\mu\, v} \left(\sum a_{\lambda\mu} a_{\lambda v} \right) x_\mu x_v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Karena persamaan (5) juga harus sama $\sum_\mu x_\mu^2$, maka harus memiliki

$$\sum_\lambda a_{\lambda\mu} a_{\lambda v} = \delta_{\mu v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

Koefisiendari $x_\mu x_v$ harus sama dengan 1 jika $v = \mu$ dan 0 jika $v \neq \mu$

Dapat ditulis persamaan transformasi dalam bentuk sama

$$x_v = \sum_{\lambda=1}^{4} b_{v\lambda} x'_\lambda \qquad (v = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

dimana $b_{v\lambda}$ adalah sekumpulan koefisien dan subtitusikan persamaan (7) dalam (4) didapat

$$x'_\mu = \sum_v a_{\mu v} \left(\sum_\lambda b_{v\lambda} x'_\lambda \right) = \sum_\lambda x'_\lambda \underbrace{\left(\sum_v a_{\mu v} b_{v\lambda} \right)}_{\delta_{\mu\lambda}} = \sum_\lambda \delta_{\mu\lambda} x'_\lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

$$\sum_v a_{\mu v} b_{v\lambda} = \delta_{\mu\lambda} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

Persamaan (9) dapa tdiselesaikan untuk mendapatkan b dengan mengalikan kedua sisinya oleh $a_{\mu\rho}$ dan menggunakan persamaan (6)

$$\sum_{\mu v} a_{\mu\rho} a_{\mu v} b_{v\lambda} = \sum_\mu a_{\mu\rho} \delta_{\mu\lambda} = a_{\lambda\rho}$$

$$= \sum_v b_{v\lambda} \left(\sum_\mu a_{\mu\rho} a_{\mu v} \right) = \sum_v b_{v\lambda} \delta_{\rho v} = b_{\rho\lambda} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

dimana $b_{\rho\lambda} = a_{\lambda\rho}$ sehingga didapat

jika $x'_\mu = \sum_\lambda a_{\mu v} x_v$

maka $x_\mu = \sum_\lambda a_{v\mu} x'_v$ ....(11)

Persamaan (9) dapat ditulis seluruh dalam bentuk a dari hasil subtitusi dalam a dan menukarkan indeks λ dan v mendapatkan

$$\sum_\lambda a_{\mu\lambda} a_{v\lambda} = \delta_{\mu v} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

Dari persamaan transformasi koordinat Lorentz utama

$$x' = \gamma (x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right)$$

Persamaan koordinat umum

$$x_1 = x \qquad x_2 = y \qquad x_3 = z \qquad x_4 = ict \quad t = \frac{x_4}{ic}$$

dimana $\beta = \frac{v}{c}$ $v = \beta c$

Persamaan koordinat umum dimasukkan kepersamaan Lorentz utama

$$x' = \gamma x - \gamma vt = \gamma x_1 - \gamma(\beta c)\left(\frac{x_4}{ic} \right) = \gamma x_1 + i\gamma\beta x_4$$

$$y' = x_2$$

$$z' = x_3$$

$$t' = \gamma t - \gamma \frac{vx}{c^2} = \frac{\gamma x_4}{ic} - \frac{i(\gamma\beta)(x_1)}{ic} = \frac{\gamma x_4}{ic} - \frac{i\gamma\beta x_1}{ic}$$

$$ict' = \gamma x_4 - i\gamma x_1$$

Jadi

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x' = \gamma x_1 + i\beta\gamma x_4 \\ x_2' &= y' = x_2 \\ x_3' &= z' = x_3 \\ x_4' &= ict' = \gamma x_4 - i\beta\gamma x_1 \end{aligned}\right\}$$

$$x_1' = \gamma x_1 + i\beta\gamma x_4$$
$$x_2' = x_2$$
$$x_3' = x_3$$
$$x_4' = \gamma x_4 - i\beta\gamma x_1$$

Sehingga

$$x' = x_1' \qquad y' = x_2' \qquad z' = x_3' \qquad ict' = x_4'$$

dapat dilihat koefisien $a_{\mu\nu}$ menunjukkan transformasi dapat ditulis dalam matrix

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$
....(13)

Sebagai perluasan dari vektor A, vector empat A_μ dinyatakan sebagai sekumpulan empat kuantitas (A_1, A_2, A_3, A_4) yang mempunyai cirri sama seperti transformasi koordinat. Jika transformasi Lorentz dinyatakan oleh persamaan (11) maka komponen A_μ dan A'_μ dihubungkan oleh

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}}_{A'_\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{A_\mu}$$

sehingga persamaan transformasi Lorentz secara umum didapat

$$A'_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} a_{\mu\nu} A_\nu$$

2. Kovarian persamaan Maxwell

Rumusan makroskopik elektromagnetik secara lengkap saat ini adalah

$$\vec{\nabla}.\vec{D} = \rho_f \quad \text{.........................(14)}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{........................(15)}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \quad \text{........................(16)}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = J_f + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad \text{................(17)}$$

(Zahn, M. 1978, hal 488 – 489)

Persamaan dasar deferensial iniharuslah dilengkapi oleh persamaan definisi yang mana menghubungkan pasangan vektor medan bersama dengan karakteristik dari materi dalam bentuk dari bersesuaian densitas volum dari momen dipol:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\,\vec{E} + \vec{P} \quad \text{........................(18)}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \text{..........................(19)}$$

Persamaan kontinuitas dapat mengungkapkan secara dasar konservasi muatan dapat menjadi kovarian

$$\vec{\nabla}.J + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad \text{.........................(20)}$$

Karena Jx, Jy, dan Jz bukannya tidak bergantung pada rapat muatan ρ, keempat besaran ini membentuk vector 4 besaran dasar dan jika didefinisikan rapat arus vector empat sebagai J, maka menurut komponennya (J1, J2, J3, dan J4=icρ), dapat dituliskan persamaan kontinuitas dalam bentuk kovarian

$$\sum_\nu \frac{\partial J_\nu}{\partial x_\nu} = 0$$

yang penjumlahannya berlangsung dari v=1 hingga v=4, atau dapat dituliskan sebagai

$\square\square J = 0$

sehingga potensial vector A dan potensial scalar φ memenuhi persamaan gelombang tak homogen

$$\vec{\nabla}^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0 J \quad \text{dan}$$

$$\vec{\nabla}^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{……. (21)}$$

(Reitz, J.R., 1979, hal 268)

Karena J dan ρ adalah komponen suatu vector empat, maka persamaan (21) harus mewakili keempat komponen suatu persamaan vector empat dan φ serta A juga harus bergantung membentuk suatu vector empat. Jika Λ didefinisikan sebagai potensial empat, maka Λ1=A1, Λ2=A2, Λ3=A3, Λ4 = iφ/c, sehingga persamaan (21) dapat ditulis

$$\sum_{\nu}\frac{\partial^2 \Lambda_\lambda}{\partial^2 x_\nu} = -\mu_0 J_\lambda$$ atau dapat ditulis

sebaga i $\square^2 \Lambda = -\mu_0 J$ …(22)

dengan $\square^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ sebagai operator Laplace atau operator d'Alembert, sehingga persamaan persyaratan Lorentz

$$\vec{\nabla}\cdot A + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$ menjadi $$\sum_{\nu}\frac{\partial \Lambda_\nu}{\partial x_\nu} = 0$$ atau

$\square\square\Lambda = 0$

Persamaan medan listrik dan medan magnet yaitu

$$B = \nabla x A \quad \text{……………. (23)}$$

$$E = -\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t} \quad \text{……………. (24)}$$

persamaan (23) dapat dituliskan dalam bentuk lain yaitu

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \hat{x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z};\quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x};\quad \text{dan } B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \hat{x}B_x + \hat{y}B_y + \hat{z}B_z$$

dari hasil Bx dituliskan menjadi bentuk umum

$$f_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \quad \text{……. (25)}$$

persamaan (24) dapat dituliskan dalam bentuk lain yaitu

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x}\frac{\partial}{\partial y}\hat{y}\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)\phi - \frac{\partial A_\mu}{\partial t} = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{x}\frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{y}\frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}\right) - \left(\frac{\partial A_1}{\partial t} + \frac{\partial A_2}{\partial t} + \frac{\partial A_3}{\partial t}\right)$$

$$= -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{x}\frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{y}\frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}\right) - \left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{\partial A_z}{\partial t}\right)$$

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t};\quad E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t};\quad \text{dan } E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}$$

karena A dari φ/c merupakan bentuk vektor empat, maka persamaan (24) dapat ditulis

$$i\frac{E}{c} = \frac{\partial\Lambda_1}{\partial x_4} - \frac{\partial\Lambda_4}{\partial x_1}$$, dan seterusnya

didapatkan $\vec{E}$ dan $\vec{B}$ terlihat dalam komponen dari $f_{\mu\nu}$ sebagai berikut

$$f_{\mu\nu} = \frac{\partial\Lambda_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\Lambda_\mu}{\partial x_\nu} \quad \text{………….. (26)}$$

dan dalam bentuk matrik

$$f_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{iE_1}{c} \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{iE_2}{c} \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{iE_3}{c} \\ \frac{iE_1}{c} & \frac{iE_2}{c} & \frac{iE_3}{c} & 0 \end{pmatrix}$$

..…..………………. (27)

(Arfken, G.B., 2001, hal. 286)

dengan mengambil divergensi tensor medan, dan dari persamaan (26) diperoleh

$$\sum_{\nu}\frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}}=\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\sum_{\nu}\frac{\partial \Lambda_{\nu}}{\partial x_{\nu}}-\sum_{\nu}\frac{\partial^{2}\Lambda_{\mu}}{\partial x_{\nu}^{2}}$$

………….. (28)

Dari persamaan (22) dan (28) diperoleh

$$\sum_{\nu}\frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}}=\mu_0 J \qquad \text{atau}$$

$$\square\square f=\mu_0 J$$

……………………….. (29)

Ini merupakan persamaan vector empat yang menyatakan kovarian dari dua persamaan Maxwell, yaitu $\nabla\cdot E=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ dan $\nabla x B=\mu_0 J+\frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t}$.

Persamaan (29) dapat ditulis

$$\frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_{\lambda}}+\frac{\partial f_{\nu\lambda}}{\partial x_{\mu}}+\frac{\partial f_{\lambda\mu}}{\partial x_{\nu}}=0 \qquad ..\ (30)$$

(Arfken, G.B., 2001, hal. 286)

SIMPULAN DAN SARAN

Dari pembahasandapatdisimpulkan

1. Perumusan persamaan transformasi koordinat Lorentz secara umum.

$$A'_{\mu}=\sum_{\nu=1}^{4}a_{\mu\nu}A_{\nu}$$

2. Perumusan kovarian persamaan Maxwell pada transformasi Lorentz

$$\sum_{\nu}\frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}}=\mu_0 J \qquad \text{atau}$$

$$\frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_{\lambda}}+\frac{\partial f_{\nu\lambda}}{\partial x_{\mu}}+\frac{\partial f_{\lambda\mu}}{\partial x_{\nu}}=0$$

Transformasi Lorentz tidak hanya dapat dilakukan pada koordinat, tetapi dapat juga pada momentum – energy dan medan listrik dan medan magnet. Untuk itu disarankan untuk merumuskan transformasi pada momentum – energy dan medan listrik dan medan magnet

DAFTAR PUSTAKA

Arfken, G.B., (2001), *Mathematical Methods for Physicists*, 5 th edition, Burlington: Harcourt Academic Press.

Reitz, J.R., (1979), *Foundamental of Electromagnatic Theory*, 3rd edition, terjemahanolehSuwarno W, Bandung: Penerbit ITB Bandung.

Zahn, M., (1979), *Electromagnetic Field Theory : a problem solving approach*, Florida: Johm Wiley & Sons, Inc.